数学Ⅰ・数学A

（全　問　必　答）

第１問　（配点　20）

〔１〕　方程式

$$2(x-2)^2 = |3x-5| \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。

(1)　方程式①の解のうち，$x < \frac{5}{3}$ を満たす解は

$$x = \boxed{\text{ア}},\ \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

(2)　方程式①の解は全部で $\boxed{\text{エ}}$ 個ある。その解のうちで最大のものを a とすると，$m \leqq a < m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{オ}}$ である。

（数学Ⅰ・数学A第１問は次ページに続く。）

〔2〕 集合A，Bを

$A=\{n \mid n$は10で割り切れる自然数$\}$

$B=\{n \mid n$は4で割り切れる自然数$\}$

とする。

(1) 次の $\boxed{\text{カ}}$ と $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。

自然数nがAに属することは，nが2で割り切れるための $\boxed{\text{カ}}$ 。

自然数nがBに属することは，nが20で割り切れるための $\boxed{\text{キ}}$ 。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件でない

② 十分条件であるが，必要条件でない

③ 必要条件でも十分条件でもない

(2) 次の $\boxed{\text{ク}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。

$C=\{n \mid n$は10と4のいずれでも割り切れる自然数$\}$

$D=\{n \mid n$は10でも4でも割り切れない自然数$\}$

$E=\{n \mid n$は20で割り切れない自然数$\}$

とする。自然数全体の集合を全体集合とし，その部分集合Gの補集合を$\overline{G}$で表すとき

$C=\boxed{\text{ク}}$，$D=\boxed{\text{ケ}}$，$E=\boxed{\text{コ}}$

である。

⓪ $A \cup B$　① $A \cup \overline{B}$　② $\overline{A} \cup B$　③ $\overline{A \cup B}$

④ $A \cap B$　⑤ $A \cap \overline{B}$　⑥ $\overline{A} \cap B$　⑦ $\overline{A \cap B}$

第2問 (配点 25)

a を定数とし，x の2次関数

$$y = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 8a + 4 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする。

(1) グラフ G が表す放物線の頂点の座標は

$$\left(a - \boxed{\text{ア}},\ a^2 - \boxed{\text{イ}}\,a + \boxed{\text{ウ}}\right)$$

である。グラフ G が x 軸と異なる2点で交わるのは

$$\boxed{\text{エ}} - \sqrt{\boxed{\text{オ}}} < a < \boxed{\text{エ}} + \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

のときである。さらに，この二つの交点がともに x 軸の負の部分にあるのは

$$\boxed{\text{カ}} - \sqrt{\boxed{\text{キ}}} < a < \boxed{\text{ク}} - \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

のときである。

(数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。)

(2) グラフGが表す放物線の頂点のx座標が3以上7以下の範囲にあるとする。

このとき，aの値の範囲は

$$\boxed{\text{コ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{サ}}$$

であり，2次関数①の$3 \leqq x \leqq 7$における最大値Mは

$\boxed{\text{コ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{シ}}$ のとき

$$M = \boxed{\text{ス}}\,a^2 - \boxed{\text{セソ}}\,a + \boxed{\text{タチ}}$$

$\boxed{\text{シ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{サ}}$ のとき

$$M = \boxed{\text{ツ}}\,a^2 - \boxed{\text{テト}}\,a + \boxed{\text{ナニ}}$$

である。

したがって，2次関数①の$3 \leqq x \leqq 7$における最小値が6であるならば

$$a = \boxed{\text{ヌ}} + \boxed{\text{ネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$$

であり，最大値Mは

$$M = \boxed{\text{ハヒ}} - \boxed{\text{フ}}\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}$$

である。

第3問 (配点 30)

$\triangle ABC$ において，$AB = 2$，$BC = \sqrt{5} + 1$，$CA = 2\sqrt{2}$ とする。また，$\triangle ABC$ の外接円の中心を O とする。

(1) このとき，$\angle ABC = \boxed{アイ}^\circ$ であり，外接円 O の半径は

$$\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\sqrt{\boxed{オ}}$$

である。

(2) 円 O の円周上に点 D を，直線 AC に関して点 B と反対側の弧の上にとる。$\triangle ABD$ の面積を S_1，$\triangle BCD$ の面積を S_2 とするとき

$$\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{5} - 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

であるとする。$\angle BAD + \angle BCD = \boxed{カキク}^\circ$ であるから

$$CD = \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}AD$$

となる。このとき

$$CD = \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\sqrt{\boxed{スセ}}$$

である。

(数学Ⅰ・数学A第3問は次ページに続く。)

さらに，2辺AD，BCの延長の交点をEとし，△ABEの面積をS_3，△CDEの面積をS_4とする。このとき

$$\frac{S_3}{S_4}=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

である。①と②より

$$\frac{S_2}{S_4}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

となる。

第4問 (配点 25)

1辺の長さ1の正六角形があり，その頂点の一つをAとする。一つのさいころを3回投げ，点Pを次の(a)，(b)，(c)にしたがって，この正六角形の辺上を反時計回りに進める。

(a) 頂点Aから出発して，1回目に出た目の数の長さだけ点Pを進める。

(b) 1回目で点Pがとまった位置から出発して，2回目に出た目の数の長さだけ点Pを進める。

(c) 2回目で点Pがとまった位置から出発して，3回目に出た目の数の長さだけ点Pを進める。

(1) 3回進めたとき，点Pが正六角形の辺上を1周して，ちょうど頂点Aに到達する目の出方は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りである。

3回進める間に，点Pが1回も頂点Aにとまらない目の出方は $\boxed{\text{ウエオ}}$ 通りである。

(数学Ⅰ・数学A第4問は次ページに続く。)

(2) 3回進める間に，点Pが3回とも頂点Aにとまる確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キクケ}}}$ であり，ちょうど2回だけ頂点Aにとまる確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

3回進める間に，点Pがちょうど1回だけ頂点Aにとまる確率は $\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。

(3) 3回進める間に，点Pが頂点Aにとまる回数の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ 回である。